Géométrie analytique dans le plan

1. Produit scalaire - Introduction

Définition

Définition de la norme d'un vecteur (‖ ‖) : $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$
Définition de « orthogonaux » : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\vec{u}.\vec{v} = 0$
Définition de ∠ : $\angle(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$
Définition de « projeté orthogonal » : $\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ avec $\vec{v} \neq \vec{0}$

Distance entre deux points : $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
Définition d'angle géométrique : $\widehat{ABC} = \angle\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ avec $\overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$

Propriétés admises

$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (le produit scalaire est commutatif)
$\vec{0}.\vec{v} = 0$
$(a\vec{u}).(b\vec{v}) = (ab)(\vec{u}.\vec{v})$ avec $a, b \in \mathbb{R}$
$(\vec{u}+\vec{v}).\left(\vec{s}+\vec{t}\right) = (\vec{u}.\vec{s}) + \left(\vec{u}.\vec{t}\right) + (\vec{v}.\vec{s}) + \left(\vec{v}.\vec{t}\right)$

$\vec{u}.\vec{u} > 0$ ssi $\vec{u} \neq \vec{0}$
$|\vec{u}.\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$; l'égalité tient ssi $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$

Propriété

$\|k.\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$

Preuve

$\|k\vec{u}\| = \sqrt{(k\vec{u}).(k\vec{u})} = \sqrt{(kk)(\vec{u}.\vec{u})} = \sqrt{k^2}\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = |k|\|\vec{u}\|$
c.q.f.d.

Propriété

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Preuve

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = \arccos\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$
$$\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)$$
c.q.f.d.

Propriété

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\| \cos \widehat{ABC}$ avec $\overrightarrow{BA} \neq \vec{0}$ et $\overrightarrow{BC} \neq \vec{0}$

Preuve

$$\widehat{ABC} = \angle(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \arccos \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|}$$
$$\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|} = \cos \widehat{ABC}$$
$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\| \cos \widehat{ABC}$$
c.q.f.d.

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ssi $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$

Preuve

$\Rightarrow$
$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \arccos \frac{0}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \arccos 0$$
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}$$
$\Leftarrow$
$$\arccos \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\pi}{2}$$
$$\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = 0$$
$$\vec{u}.\vec{v} = 0$$
c.q.f.d

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire ssi $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$.

Preuve

$\Rightarrow$

$\vec{u} = k\vec{v}$ et $k \neq 0$
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \arccos \frac{(k\vec{v}).\vec{v}}{\|k\vec{v}\|\|\vec{v}\|} = \arccos \frac{k(\vec{v}.\vec{v})}{|k|\|\vec{v}\|\|\vec{v}\|} = \arccos \frac{k}{|k|}$$
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = \arccos \pm 1$$
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ ou } \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$$
$\Leftarrow$
$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \text{ ou } \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$$
$$\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \pm 1$$
$$\vec{u}.\vec{v} = \pm\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$
$$|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$$
$\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$

c.q.f.d.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0}$, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaire. Alors:

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ iff $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ iff $\angle(\vec{u},\vec{v}) = \pi$

Preuve

$\Leftarrow$

Si $\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0$: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\big(\angle(\vec{u},\vec{v})\big) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(0) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

Si $\angle(\vec{u},\vec{v}) = \pi$: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\big(\angle(\vec{u},\vec{v})\big) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\pi) = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.

$\Rightarrow$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\big(\angle(\vec{u},\vec{v})\big)$

(a)

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$\cos\big(\angle(\vec{u},\vec{v})\big) = 1$

$\angle(\vec{u},\vec{v}) = 0$

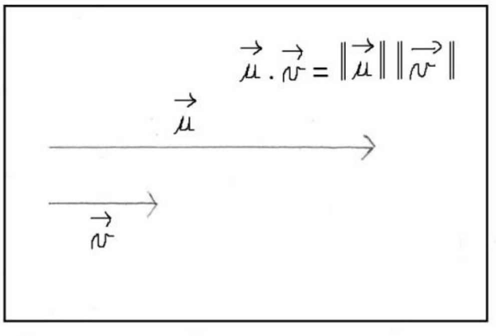
(b)

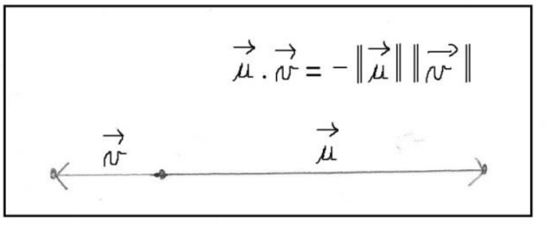
$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$\cos\big(\angle(\vec{u},\vec{v})\big) = -1$

$\angle(\vec{u},\vec{v}) = \pi$

c.q.f.d.





Propriétés

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors :

$$\vec{u} = \vec{v} \text{ ssi } \quad \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \text{ et } \angle(\vec{u}, \vec{v}) = 0$$

Preuve

$\Rightarrow$

$$\angle(\vec{u}, \vec{u}) = \arccos \frac{\vec{u}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|\|\vec{u}\|} = \arccos 1 = 0$$

$\Leftarrow$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

$|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ iff $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\vec{u} = k\vec{v}$ et $k \neq 0$

$$\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow \|k\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow |k|\|\vec{v}\| = \|\vec{v}\| \Leftrightarrow |k| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

$k = \pm 1$

$\vec{u} = \pm 1\vec{v}$

Supposons que $\vec{u} = -1\vec{v}$.

$\vec{u}.\vec{v} = (-1\vec{v}).\vec{v} = -1(\vec{v}.\vec{v}) = -\|\vec{v}\|^2$

$\vec{u}.\vec{v} > 0$

Donc, $\vec{u} \neq -1\vec{v}$.

$\vec{u} = \vec{v}$

c.q.f.d.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$.

Soit $\overrightarrow{u'}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.

Alors, $\quad \vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{u'}.\vec{v}$.

Preuve

$$\overrightarrow{u'}.\vec{v} = \left(\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right).\vec{v} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}(\vec{v}.\vec{v}) = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\|\vec{v}\|^2 = \vec{u}.\vec{v}$$

c.q.f.d.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{v} \neq \vec{0}$. Alors :

$\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

iff

$\overrightarrow{u'}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires and $\vec{u} - \overrightarrow{u'}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

Si $\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$

alors $\vec{u} - \overrightarrow{u'} = \vec{0}$ iff $\vec{u}$ and $\vec{v}$ are colinear

Preuve

(a)

$\Rightarrow$

$\overrightarrow{u'} = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$

$\overrightarrow{u'}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$\left(\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} - \overrightarrow{u'}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} - \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} - \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\|\vec{v}\|^2 = \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u} - \overrightarrow{u'}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

$\Leftarrow$

$\overrightarrow{u'} = k\vec{v}$

$\left(\vec{u} - \overrightarrow{u'}\right).\vec{v} = (\vec{u} - k\vec{v}).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} - (k\vec{v}).\vec{v} = \vec{u}.\vec{v} - k(\vec{v}.\vec{v}) = \vec{u}.\vec{v} - k\|\vec{v}\|^2$

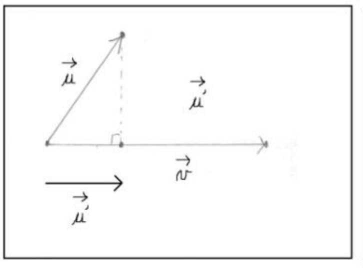
$\vec{u}.\vec{v} - k\|\vec{v}\|^2 = 0$

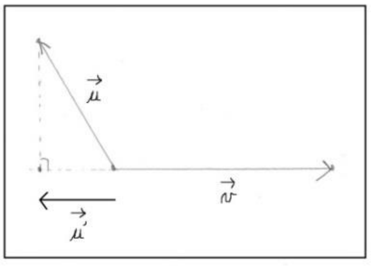
$k\|\vec{v}\|^2 = \vec{u}.\vec{v}$

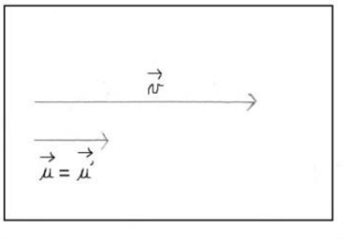
$k = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$

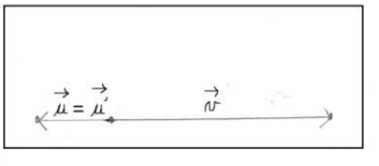
$\overrightarrow{u'} = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$

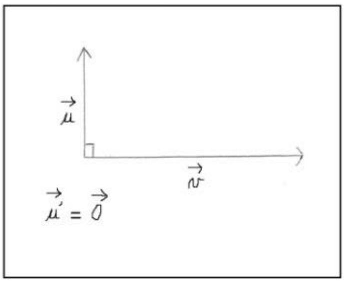
$\overrightarrow{u'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$











(b)

$\Leftarrow$

$\vec{u}$ and $\vec{v}$ are colinear

(i)

$\vec{u} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{u'} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{0}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \vec{0}$$

$\vec{u} - \overrightarrow{u'} = \vec{0}$

(ii)

$\vec{u} \neq \vec{0}$

$\vec{u} = k\vec{v}$ and $k \neq 0$

$$\overrightarrow{u'} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{(k\vec{v}).\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{k(\vec{v}.\vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{k\|\vec{v}\|^2}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = k\vec{v}$$

$\vec{u} - \overrightarrow{u'} = k\vec{v} - k\vec{v} = \vec{0}$

$\Rightarrow$

$\vec{u} - \overrightarrow{u'} = \vec{0}$

$\vec{u} = \overrightarrow{u'}$

$$\overrightarrow{u'} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}$$

$\vec{u}$ and $\vec{v}$ are colinear

c.q.f.d.

Propriété

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}.\vec{v})$

Preuve

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} + \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{u} + 2(\vec{u}.\vec{v}) + \vec{v}.\vec{v}$$
$$= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}.\vec{v})$$

c.q.f.d.

Propriété

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
Soit $\overrightarrow{u'}$ le projeté orthogonal de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$.
Alors $\left\|\overrightarrow{u'}\right\| = \|\vec{u}\|\left|\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right|$

$\left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\| = \|\vec{u}\| \sin\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)$

Preuve

$$\left\|\overrightarrow{u'}\right\| = \left\|\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right\| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{v}\|^2}\|\vec{v}\| = \frac{|\vec{u}.\vec{v}|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\left|\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\left|\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right|}{\|\vec{v}\|}$$

$$\left\|\overrightarrow{u'}\right\| = \|\vec{u}\|\left|\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right|$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \left\|\overrightarrow{u'}+\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{u'}\right\|^2 + \left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{u'}.\left(\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right)\right) = \left\|\overrightarrow{u'}\right\|^2 + \left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\|^2$$

$$\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\left|\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right|^2 + \left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\|^2$$

$$1 = \left(\cos\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right)^2 + \frac{\left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\|^2}{\|\vec{u}\|^2}$$

$$\frac{\left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\|^2}{\|\vec{u}\|^2} = \left(\sin\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right)^2$$

$$\left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\|^2 = \|\vec{u}\|^2\left(\sin\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)\right)^2$$

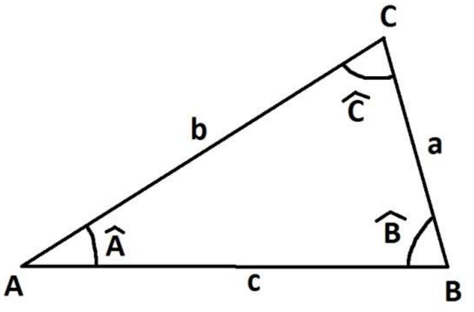
$$\left\|\vec{u}-\overrightarrow{u'}\right\| = \|\vec{u}\| \sin\left(\angle(\vec{u},\vec{v})\right)$$

c.q.f.d.

Propriété – Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos \hat{A}$



Preuve

$$\left\|\overrightarrow{AB} + \left(-\overrightarrow{AC}\right)\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|-\overrightarrow{AC}\right\|^2 + 2\left(\overrightarrow{AB}.\left(-\overrightarrow{AC}\right)\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)$$

$$\left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\left(\angle\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)\right)$$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos \hat{A}$

c.q.f.d.

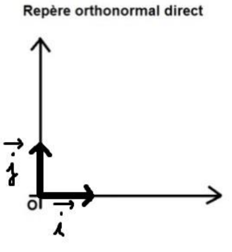
2. Repères du plan, coordonnées

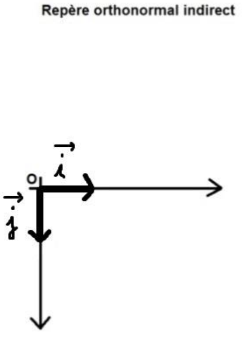
Définitions

Soient un point O et deux vecteurs du plan non colinéaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.

La base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthogonale ssi $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux.
La base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormale ssi $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont orthogonaux et $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 1$.
La base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormée ssi elle est orthonormale.
La base orthonormale $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ peut être directe $\left((\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \frac{\pi}{2}\right)$ ou indirecte $\left((\vec{\imath},\vec{\jmath}) = \frac{-\pi}{2}\right)$.

Le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthogonal ssi la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthogonale.
Le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormal ssi la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormale.
Le repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormé ssi la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormée.
Le repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est direct ssi la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormale directe.
Le repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est indirect ssi la base $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est orthonormale indirecte.





Propriétés

Soit une base orthonormale $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- $si \begin{cases} \vec{u}(x;y) \\ \vec{v}(x';y') \end{cases} alors \qquad \vec{u}.\vec{v} = x\,x' + y\,y'$

  $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

- $si\ A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}\ et\ B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}\ alors \quad AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Démonstrations

$$\begin{aligned}
\vec{u}.\vec{v} &= (x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}).(x'\,\vec{\imath} + y'\,\vec{\jmath}) \\
&= (x\,\vec{\imath}.x'\,\vec{\imath}) + (x\,\vec{\imath}.y'\,\vec{\jmath}) + (y\,\vec{\jmath}.x'\,\vec{\imath}) + (y\,\vec{\jmath}.y'\,\vec{\jmath}) \\
&= x\,x'(\vec{\imath}.\vec{\imath}) + x\,y'(\vec{\imath}.\vec{\jmath}) + y\,x'(\vec{\jmath}.\vec{\imath}) + y\,y'(\vec{\jmath}.\vec{\jmath}) \\
&= x\,x'\|\vec{\imath}\|^2 + x\,y'0 + y\,x'0 + y\,y'\|\vec{\jmath}\|^2 \\
&= x\,x' + y\,y'
\end{aligned}$$

c.q.f.d.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{x\,x + y\,y} = \sqrt{x^2+y^2}$

c.q.f.d.

$Si\ A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}\ et\ B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}\ alors \quad AB = \|\overrightarrow{AB}\|$

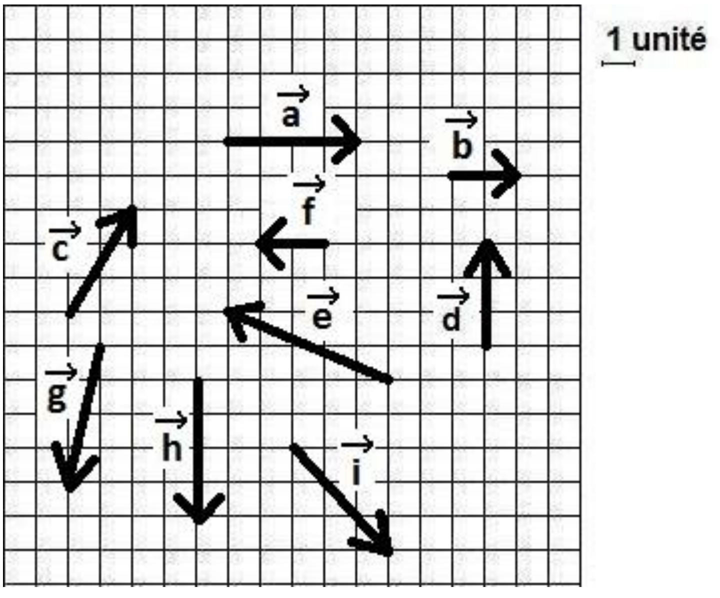
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$

$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$

c.q.f.d.

3. Produit scalaire – Lecture graphique

Exercice 1



Calculer $\vec{a}.\vec{a}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{a}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{b}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{c}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{c}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{d}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{d}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{e}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{e}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{f}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{f}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{g}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{g}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{h}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{h}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{\imath}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{\imath}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{a}.\vec{0}$.
Est-ce que $\vec{a}$ et $\vec{0}$ sont orthogonaux ?
Calculer $\vec{0}.\vec{0}$.
Est-ce que $\vec{0}$ et $\vec{0}$ sont orthogonaux ?

Solution de l'exercice 1

a) $16, non$ b) $8, non$ c) $8, non$ d) $0, oui$ e) $-20, non$ f) $-8, non$ g) $-4, non$ h) $0, oui$ i) $12, non$
j) $0, oui$ k) $0, oui$

4. Vecteur normal à une droite

Propriété

Un vecteur est normal à une droite
ssi
il n'est pas égal au vecteur nul et il est orthogonal à un vecteur directeur de cette droite.

Propriété

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. Alors :
La droite (d) passant par $A\begin{pmatrix}x_A\\y_A\end{pmatrix}$ et admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ comme vecteur normal a pour équation : $ax+by+(-ax_A-by_A)=0$.
Remarque : On dit que $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de (d).

Preuve :

Soient un point M et des réels x et y tels que $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

$M\in(d) \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{AM}\,.\vec{n}=0.$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}.$

$$\begin{aligned}M\in(d) \quad&\Leftrightarrow\quad (x-x_A \quad y-y_A)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=0\\&\Leftrightarrow\quad a(x-x_A)+b(y-y_A)=0\\&\Leftrightarrow\quad ax-ax_A+by-by_A=0\\&\Leftrightarrow\quad ax+by-ax_A-by_A=0.\end{aligned}$$

$(d)\colon ax+by+(-ax_A-by_A)=0$.

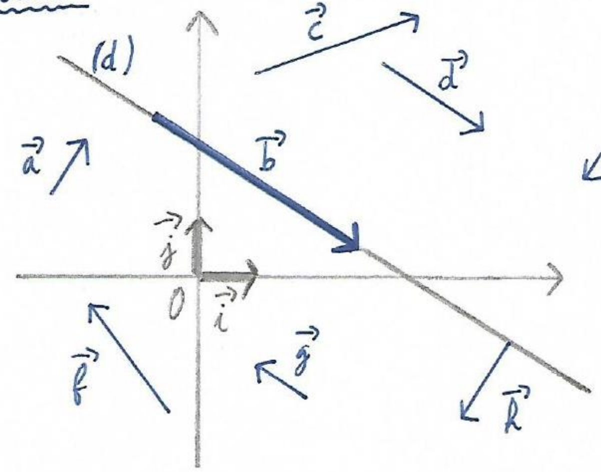
c.q.f.d.

5. Vecteurs directeurs, vecteurs normaux : Lecture graphique

Exercice 2

$\boxed{\text{Vecteurs directeurs, vecteurs normaux : Lecture graphique}}$

Exercice 1



Théorie : Soient $\vec{v}$ un vecteur et (d) une droite.

$\vec{v}$ est un vecteur directeur de (d)
ssi
$\vec{v} \neq \vec{0}$ et la direction de $\vec{v}$ est parallèle à (d).

$\vec{v}$ est un vecteur normal à (d)
ssi
$\vec{v} \neq \vec{0}$ et la direction de $\vec{v}$ est perpendiculaire à (d).

Remarque : (d) admet donc une infinité de vecteurs directeurs et une infinité de vecteurs normaux.

Parmi les vecteurs représentés :

a) Lesquels sont des vecteurs directeurs de (d) ?

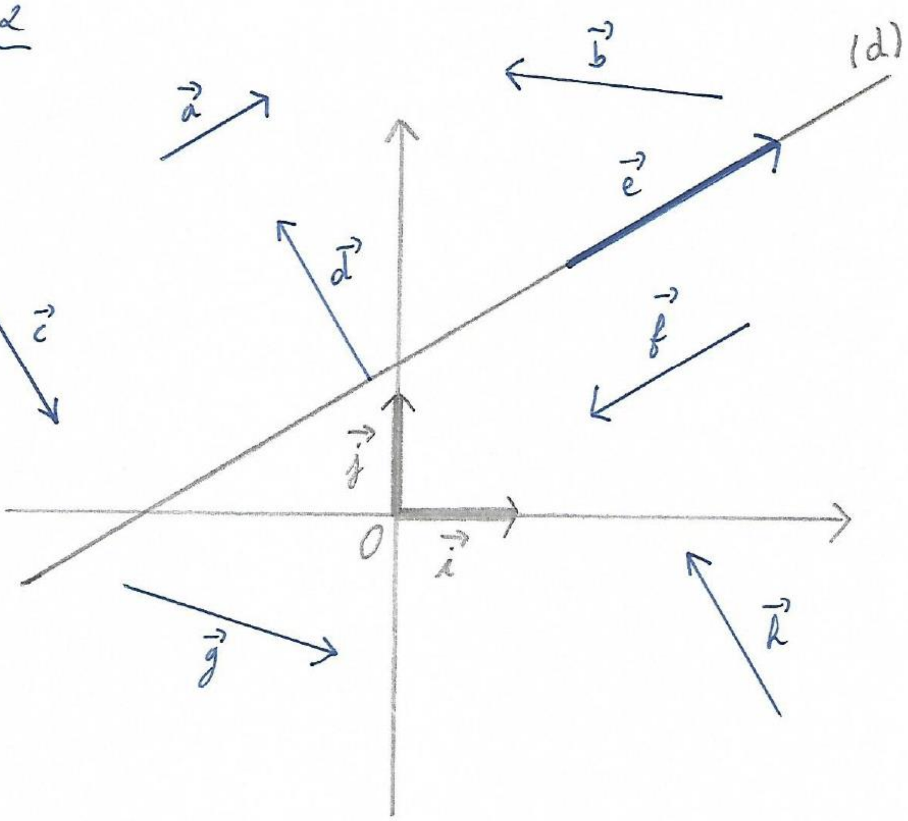
b) Lesquels sont des vecteurs normaux à (d) ?

c) Lesquels ne sont ni des vecteurs directeurs de (d) ni des vecteurs normaux à (d) ?

Solution :

a) $\vec{b}, \vec{d}, \vec{g}$ b) $\vec{a}, \vec{e}, \vec{k}$ c) $\vec{c}, \vec{f}, \vec{i}, \vec{j}$

Exercice 2



Parmi les vecteurs représentés :

a) Lesquels sont des vecteurs directeurs de (d) ?

b) Lesquels sont des vecteurs normaux à (d) ?

c) Lesquels ne sont ni des vecteurs directeurs de (d) ni des vecteurs normaux à (d) ?

6. Les droites - Exercices

Exercice 3

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soient (d) une droite, A et B des points,
$\vec{u}$ le vecteur directeur de (d) tel que la première coordonnée de $\vec{u}$ est égale à 1 ou $\vec{u}(0;1)$.
Questions :

a) $A \in (d)$? Justifier par un calcul.
b) $B \in (d)$? Justifier par un calcul.
c) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$.
Écrire une phrase qui permet de comprendre ce vecteur directeur $\vec{u}$.
d) Donner les coordonnées d'un vecteur normal (que vous nommerez $\vec{n}$) de la droite (d).
Remarque : il y a une infinité de réponses correctes, choisissez le vecteur que vous voulez.
e) Représenter (d), $\vec{u}$, $\vec{n}$, A, B.

1) (d): $y = 3x - 1$; $A(2;5)$; $B(-1;2)$.
2) (d): $y = -1$; $A(2;3)$; $B(0;-1)$.
3) (d): $x = 2$; $A(0;3)$; $B(2;1)$.
4) (d): $y = -4x + 2$; $A(2;1)$; $B(1;-2)$.

5) (d): $y = 2x - 2$; $A(3;2)$; $B(-1;-4)$.
6) (d): $y = 2$; $A(-1;2)$; $B(1;3)$.
7) (d): $x = 1$; $A(0;1)$; $B(1;0)$.
8) (d): $y = -x + 3$; $A(-2;5)$; $B(1;5)$.

Exercice 4

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soient (d) une droite, A et B des points appartenant à cette droite,
$\vec{u}$ un vecteur directeur de (d),
$\vec{n}$ un vecteur normal de (d) .
Questions :

a) calculer l'équation réduite de (d) ;
b) tracer (d).

1) $\vec{n}(1;2)$; $A(-2;-1)$.
2) $\vec{u}(3;1)$; $A(1;0)$.
3) $A(-1;0)$; $B(2;3)$.
4) $\vec{n}(1;0)$; $A(2;-1)$.
5) $\vec{u}(1;0)$; $A(-2;-1)$.
6) $\vec{u}(0;3)$; $A(2;-1)$

7) $\vec{n}(-1;1)$; $A(2;1)$.
8) $\vec{u}(-2;2)$; $A(2;1)$.
9) $A(1;-3)$; $B(-2;3)$.
10) $\vec{n}(2;0)$; $A(-2;3)$.
11) $\vec{u}(-2;0)$; $A(3;1)$.
12) $\vec{u}(0;-2)$; $A(-3;3)$

7. Les droites - Exercices pour préparer l'interrogation

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 5 (facultatif)

Soient (d) une droite, A et B des points.

a) $A \in (d)$? Justifier par un calcul.
b) $B \in (d)$? Justifier par un calcul.
c) Calculer des coordonnées d'un vecteur directeur de (d). Notez ce vecteur $\vec{u}$.
d) Calculer des coordonnées d'un vecteur normal à (d). Notez ce vecteur $\vec{n}$.
e) Représenter (d), A, B, $\vec{u}$, $\vec{n}$.

9) $(d): y = 4x + 1$; $A(-1;-3)$; $B(1;2)$.
10) $(d): y = -2x - 1$; $A(2;-3)$; $B(-1;1)$.
11) $(d): y = 2$; $A(2;3)$; $B(3;2)$.
12) $(d): x = -1$; $A(-1;3)$; $B(3;-1)$.

Exercice 6 (facultatif)

Soient (d) une droite, A et B des points, $\vec{u}$ un vecteur directeur de (d), $\vec{n}$ un vecteur normal de (d) .

c) Calculer l'équation réduite de (d).
d) Tracer (d).

13) $\vec{n}(-3;-2)$; $A(1;-2)$.
14) $\vec{u}(3;1)$; $A(-1;0)$.
15) $A(2;4)$; $B(-1;-2)$.
16) $\vec{u}(1;0)$; $A(0;2)$.
17) $\vec{u}(0;1)$; $A(-2;2)$.

Exercice 7 (facultatif)

Soient (d) et (Δ) deux droites.

a) Déterminer l'intersection des droites (d) et (Δ).
b) Déduire la position relative de (d) par rapport à (Δ).
c) Tracer (d) et (Δ).

1) $(d): 2x - y + 2 = 0$; $(\Delta): 3x + 2y - 1 = 0$.
2) $(d): y = -2x + 1$; $(\Delta): y = -2x + 2$.
3) $(d): 2x + 2y - 1 = 0$; $(\Delta): y = -x + \frac{1}{2}$.

Solutions

Exercice 5 :
1) a) $A \in (d)$ b) $B \notin (d)$ c) $\vec{u}(1;4)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses) d) $\vec{n}(4;-1)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses)
2) a) $A \notin (d)$ b) $B \in (d)$ c) $\vec{u}(1;-2)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses) d) $\vec{n}(2;1)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses)
3) a) $A \notin (d)$ b) $B \in (d)$ c) $\vec{u}(1;0)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses) d) $\vec{n}(0;1)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses)
4) a) $A \in (d)$ b) $B \notin (d)$ c) $\vec{u}(0;1)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses) d) $\vec{n}(1;0)$ (il y a une infinité d'autres bonnes réponses).
Exercice 6 :
1)$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$ 2) $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$ 3)$y = 2x$ 4)$y = 2$ 5)$x = -2$.
Exercice 7 :
1) $A\left(\frac{-3}{7};\frac{8}{7}\right)$, les droites sont sécantes ; 2) il n'y a pas de point d'intersection, les droites sont strictement parallèles ; 3) (d) , les droites sont confondues.

8. Déterminer la position relative de deux droites - Exercices

Exercice 8

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit les points $A(2;3)$, $B(0;1)$, $C\left(-3;\frac{11}{2}\right)$, $D\left(\frac{7}{2};-1\right)$, $E(1,-1)$, $F(4;2)$, $G(-4;0)$, $H(6;0)$, $I\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$, $J(-2;-1)$.
Déterminer, par calcul, la position relative des droites :

a) (AB) et (CD) ;
b) (AB) et (EF) ;
c) (AB) et (GH) ;
d) (AB) et (IJ) .

Placer dans le plan les points donnés et tracer les droites mentionnées.

Exercice 9 (facultatif)

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit les points $A\left(\frac{-3}{2};-1\right)$, $B\left(\frac{7}{2};1\right)$, $C(-4;-2)$, $D(6;2)$, $E(5,-1)$, $F(0;0)$, $G(7{,}5;-1{,}5)$, $H(4{,}5;6)$, $I(5;4)$, $J(0;2)$.
Déterminer, par calcul, la position relative des droites :

a) (AB) et (CD) ;
b) (AB) et (EF) ;
c) (AB) et (GH) ;
d) (AB) et (IJ) .

Placer dans le plan les points donnés et tracer les droites mentionnées.

Exercice 10 (facultatif)

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Soit les points $A(-2;1)$, $B(0;6)$, $C(2;3)$, $D(3;-1)$, $E(5{,}3)$, $F(3;-2)$, $G(3;-1)$, $H(0{,}5;0)$, $I\left(-1;\frac{7}{2}\right)$, $J\left(-3;\frac{-3}{2}\right)$.
Déterminer, par calcul, la position relative des droites :

a) (AB) et (CD) ;
b) (AB) et (EF) ;
c) (AB) et (GH) ;
d) (AB) et (IJ) .

Placer dans le plan les points donnés et tracer les droites mentionnées.

Solution de l'exercice 8

a) $(AB) \perp (CD)$
b) (AB) et (EF) sont strictement parallèles
c) (AB) et (GH) sont sécantes mais pas perpendiculaires
d) (AB) et (IJ) sont confondues

Solution de l'exercice 9

a) (AB) et (CD) sont confondues
b) (AB) et (EF) sont sécantes mais pas perpendiculaires
c) $(AB) \perp (GH)$
d) (AB) et (IJ) sont strictement parallèles

Solution de l'exercice 10

a) (AB) et (CD) sont sécantes mais pas perpendiculaires
b) (AB) et (EF) sont strictement parallèles
c) $(AB) \perp (GH)$
d) (AB) et (IJ) sont confondues

9. Déterminer la mesure d'un angle à l'aide du produit scalaire

Exercice 11

Soit un repère orthonormal du plan $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Donner les résultats en degrés arrondis à l'unité.
Soit les points A, B, C. Déterminer, par calcul et en utilisant le produit scalaire, $\widehat{ABC}$.
Placer les points A, B, C dans le plan.

a) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(7;0)$.
b) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(4;-5)$.
c) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(8;3)$.
d) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(-1;0)$.
e) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(-2;2)$.

f) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(1{,}5;2{,}5)$.
g) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(1;-4)$.
h) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(3{,}5;1{,}5)$.
i) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(5;-1)$.
j) $A(5;2)$, $B(2;1)$, $C(0{,}5;0{,}5)$.

Solution de l'exercice 11

a)

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\| \cos\widehat{ABC}$$

$$\cos\widehat{ABC} = \frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|}$$

$$\widehat{ABC} = \arccos\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|}$$

$$\overrightarrow{BA}\begin{pmatrix} 5-(2) \\ 2-(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$$

$$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 7-(2) \\ 0-(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = (3)(5) + (1)(-1) = 14$$

$$\widehat{ABC} = \arccos\frac{14}{\sqrt{10}\sqrt{26}}$$

$$\cos\widehat{ABC} \approx 30°$$

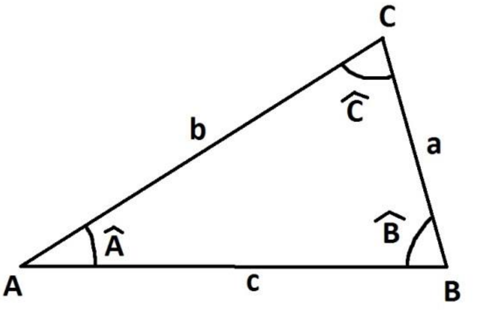
b)$90°$ c)$0°$ d)$180°$ e)$148°$ f)$90°$ g)$120°$ h)$0°$ i)$52°$ j)$180°$.

10. Théorème d'Al-Kashi et formule des sinus

Propriété – Formule d'Al-Kashi

Soit ABC un triangle.

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\hat{A}$



Propriété – Formule des sinus

$$\frac{a}{\sin\hat{A}} = \frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

Remarque : $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}b\,c\sin\hat{A} = \frac{1}{2}c\,a\sin\hat{B} = \frac{1}{2}a\,b\sin\hat{C}$

Exercice 12

Calculer les longueurs des côtés et les mesures des angles du triangle ABC qui ne sont pas dans l'énoncé.
Donner les mesures des angles en degrés.
Donner les résultats arrondis au dixième.
Dessiner un schéma représentant le triangle ABC pour vous aider.

1) $AB = 8, AC = 7$ et $\widehat{BAC} = 75°$.
2) $BC = 5, AC = 3$ et $\hat{C} = 15°$.
3) $AB = 5, BC = 9$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{3}rad$.
4) $AB = 10, AC = 8$ et $BC = 7$.
5) $AB = 4, AC = 2$ et $\hat{A} = \frac{\pi}{3}rad$.
6) $AB = 4, \hat{A} = 60°$ et $\hat{B} = 35°$.
7) $AB = 3, BC = 2$ et $\hat{B} = \frac{3\pi}{4}rad$.
8) $BC = 3, \hat{C} = 30°$ et $\hat{B} = 100°$.
9) $BC = 5, \hat{A} = 40°$ et $\hat{C} = 50°$.

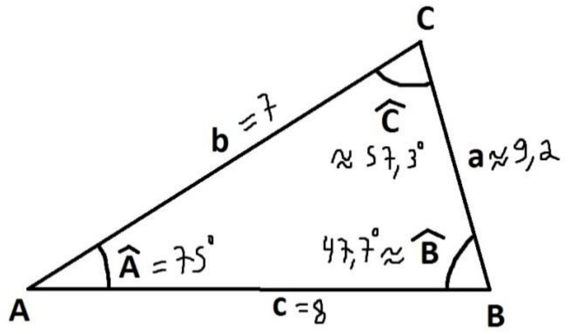
Solution de l'exercice 12

1)$BC \approx 9{,}2$; $\hat{B} \approx 47{,}5°$; $\hat{C} \approx 57{,}5°$; 2) $AB \approx 2{,}2$; $\hat{A} \approx 147{,}7°$; $\hat{B} \approx 17{,}3°$; 3) $AC \approx 7{,}8$; $\hat{A} \approx 86{,}3°$; $\hat{C} \approx 33{,}7°$; 4) $\hat{A} \approx 44{,}0°$; $\hat{B} \approx 52{,}6°$; $\hat{C} \approx 83{,}3°$; 5)$BC \approx 3{,}5$; $\hat{B} = 30°$; $\hat{C} = 90°$; 6)$\hat{C} = 85°$; $AC \approx 2{,}3$; $BC \approx 3{,}5$; 7)$AC \approx 4{,}6$; $\hat{A} \approx 17{,}8°$; $\hat{C} \approx 27{,}2°$; 8)$\hat{A} = 50°$; $AC \approx 3{,}9$; $AB \approx 2{,}0$; 9)$\hat{B} = 90°$; $AC \approx 7{,}8$; $AB \approx 6{,}0$.

Exercices à faire avec le professeur : 1 et 2.
Exercices à faire seul : 3, 4, 5.

Résolution détaillées de l'exercice 12

1)



$BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\widehat{A}$
$BC = \sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\hat{A}} = \sqrt{7^2 + 8^2 - 2 \times 7 \times 8 \times \cos 75^\circ} \approx 9{,}2$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\widehat{C}$

$\cos\hat{C} = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2\,a\,b}$

$\widehat{C} = \arccos\dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2\,a\,b}$

$\widehat{C} \approx \arccos\dfrac{8^2 - 9{,}2^2 - 7^2}{-2 \times 9{,}2 \times 7}$

$\widehat{C} \approx 57{,}3°$

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$
$\widehat{B} = 180° - \widehat{A} - \widehat{C}$
$\widehat{B} \approx 180° - 75^\circ - 57{,}3°$
$\widehat{B} \approx 47{,}7°$

Remarque :

$\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$

$\sin\hat{C} = \dfrac{c\ \sin\hat{A}}{a}$

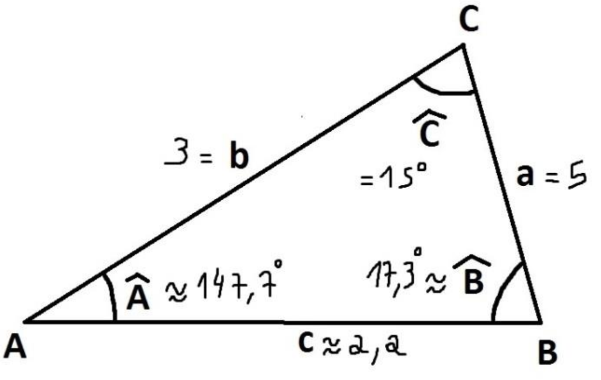
$\hat{C} = \arcsin\dfrac{c\ \sin\hat{A}}{a}$

$\hat{C} \approx \arcsin\dfrac{8\ \sin 75^\circ}{9{,}2}$

$\hat{C} \approx 57{,}1^\circ$ ou $\hat{C} \approx 180^\circ - 57{,}1^\circ = 122{,}9^\circ$

On prend laquelle ?

2)



$AB^2 = c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\widehat{C}$

$AB = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\widehat{C}}$

$AB = \sqrt{5^2 + 3^2 - 2 \times 5 \times 3 \times \cos 15^\circ}$

$AB \approx 2{,}2$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\widehat{A}$

$\cos\hat{A} = \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2\,b\,c}$

$\widehat{A} = \arccos\dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{-2\,b\,c}$

$\widehat{A} \approx \arccos\dfrac{5^2 - 3^2 - 2{,}2^2}{-2 \times 3 \times 2{,}2}$

$\widehat{A} \approx 147{,}7°$

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$

$\widehat{B} = 180° - \widehat{A} - \widehat{C}$

$\widehat{B} \approx 180° - 147{,}7° - 15^\circ$

$\widehat{B} \approx 17{,}3°$

Remarque :

$\dfrac{a}{\sin\hat{A}} = \dfrac{c}{\sin\hat{C}}$

$\sin\hat{A} = \dfrac{a\ \sin\hat{C}}{c}$

$\hat{C} = \arcsin\dfrac{a\ \sin\hat{C}}{c}$

$\hat{C} \approx\ \arcsin\dfrac{5\ \sin 15^\circ}{2{,}2}$

$\hat{C} \approx\ 36{,}0^\circ$ ou $\hat{C} \approx\ 180^\circ - 36{,}0^\circ = 144{,}0^\circ$

On prend laquelle ?

11.Les cercles

Propriété :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
Le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $I(a;b)$ et de rayon r a pour équation $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$.
Remarque : On appelle cette équation l' équation cartésienne du cercle $(\mathcal{C})$.

Preuve :

Soit un point $M(x;y)$.
Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $I(a;b)$ et de rayon r.

$M\in(\mathcal{C})$ ssi $IM=r$

ssi $\|\overrightarrow{IM}\|=r$

$\overrightarrow{IM}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$

$M\in(\mathcal{C})$ ssi $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$

ssi $\left(\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\right)^2=r^2$

ssi $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

c.q.f.d.

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 13

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du cercle, ensuite tracer ce cercle.
a. (C_1) est de centre I(3; 2) et de rayon 4 **b.** (C_2) est de centre I(-4; 1) et de rayon 3
c. (C_3) est de centre I(0; 1) et de rayon 2 **d.** (C_4) est de centre I(7; -3) et de rayon 2.

Exercice 14

Dans chaque cas, indiquer le centre et le rayon du cercle (C).
a. (C) : $(x-3)^2+(y-7)^2=4$ **b.** (C) : $(x-1)^2+y^2=25$
c. (C) : $(x+5)^2+(y-3)^2=1$ **d.** (C) : $x^2+(y-2)^2=3$.

Exercice 15

On considère le point A(5 ; -3). Ce point appartient-il aux cercles suivants ? JUSTIFIER.
a. (C_1) : $(x-3)^2+(y+1)^2=8$ **b.** (C_2) : $(x-4)^2+(y-1)^2=15$ **c.** (C_3) : $x^2+y^2=38$.

Exercice 16

Dans chaque question, on donne une équation d'un ensemble $(\mathcal{C})$, lorsque $(\mathcal{C})$ est un cercle, déterminer son centre et son rayon.

a. $x^2-2x+y^2-6y-6=0$
b. $x^2+y^2+4y+8=0$
c. $x^2+y^2-4x-6y-7=0$
d. $x^2+y^2-2x-4y+7=0$
e. $x^2+y^2-x+4y+1=0$
f. $x^2+y^2-2\sqrt{5}x+\sqrt{3}y=0$

Exercice 17

a. On considère le cercle (C) d'équation $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 5$.
Le point A(5 ; -1) appartient à (C).
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) au cercle (C) en A.

b. On considère le cercle (C) d'équation $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$.
Le point A(2 ; 0) appartient à (C).
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) au cercle (C) en A.

c. On considère le cercle (C) d'équation $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$.
Le point A(-5 ; 1) appartient à (C).
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) au cercle (C) en A.

Exercice 18

On considère les points A(0 ; 2) et B(-4 ; 0).
a. Déterminer (sans méthode imposée) une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [AB].
b. Déterminer une équation de la tangente au cercle (C) en A.
c. Déterminer une équation de la tangente au cercle (C) en B.

Solutions des exercice 13 à 18

13.a. $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 16$ b. $(x+4)^2 + (y-1)^2 = 9$ c. $x^2 + (y-1)^2 = 4$ d. $(x-7)^2 + (x+3)^2 = 4$;
14.a. $(3;7), 2$ b. $(1;0), 5$ c. $(-5;3), 1$ d. $(0;2), \sqrt{3}$;
15.a. $A \in (\mathrm{C}_1)$ b. $A \notin (\mathrm{C}_2)$ c. $A \notin (\mathrm{C}_3)$;
16.a.$(1;3), 4$ b. ce n'est pas l'équation d'un cercle c. $(2;3), 2\sqrt{5}$ d. ce n'est pas l'équation d'un cercle e. $\left(\frac{1}{2};-2\right), \frac{\sqrt{13}}{2}$ f. $\left(\sqrt{5};\frac{-\sqrt{3}}{2}\right), \frac{\sqrt{23}}{2}$;
17.a. $y = \frac{x}{2} - \frac{7}{2}$ b.$y = \frac{4}{3}x - \frac{8}{3}$ c. $x = -5$;
18.a. $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 5$ b. $2x + y - 2 = 0$ c. $2x + y + 8 = 0$.

12.Exercices sur les cercles pour préparer l'interro

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

Exercice 19

Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne du cercle, ensuite tracer ce cercle.
a. (C_1) est de centre I(-5; 0) et de rayon 7 **b.** (C_2) est de centre I(1; 2) et de rayon 3.

Exercice 20

Dans chaque cas, indiquer le centre et le rayon du cercle (C).
a. (C) : $(x-5)^2 + (y+3)^2 = 5$ **b.** (C) : $x^2 + y^2 = 12$.

Exercice 21

On considère le point A($\sqrt{6}$; -2). Ce point appartient-il aux cercles suivants ? JUSTIFIER.
a. (C_1) : $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 8$ **b.** (C_2) : $x^2 + (y-1)^2 = 15$.

Exercice 22

Dans chaque question, on donne une équation d'un ensemble $(\mathcal{C})$, lorsque $(\mathcal{C})$ est un cercle, déterminer son centre et son rayon.

a. $x^2 - 10x + y^2 + 6y + 5 = 0$
b. $x^2 + 2x + y^2 - 8y + 20 = 0$

Exercice 23

On considère le cercle (C) d'équation $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 5$.
Le point A(1 ; -3) appartient à (C).
Déterminer l'équation réduite de la tangente (T) au cercle (C) en A.

Exercice 24

On considère les points A(1 ; 2) et B(-3 ; 1).
a. Déterminer (sans méthode imposée) une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre [AB].
b. Déterminer une équation de la tangente au cercle (C) en A.

Solutions des exercices 19 à 24

19.a. $(x+5)^2 + y^2 = 49$ b. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$;
20.a. $(5\,;-3), \sqrt{5}$ b. $(0\,;0), 2\sqrt{3}$;
21.a. $A \notin (C_1)$b. $A \in (C_2)$;
22.a. $(5\,;-3), \sqrt{29}$ b. ce n'est pas l'équation d'un cercle ;
23. $y = 2x - 5$;
24.a. $(x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$ b. $4x + y - 6 = 0$.

13.Déterminer la position relative d'une droite et d'un cercle

Exercice 25

Soit un repère orthonormal du plan $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

a) Déterminer par calcul la position relative du cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\triangle)$.
b) Déterminer par calcul les coordonnées des points d'intersection du cercle $(\mathcal{C})$ avec la droite $(\triangle)$.
c) Tracer le cercle $(\mathcal{C})$ et de la droite $(\triangle)$.

1) $(\mathcal{C})\colon (x-4)^2+(y-1)^2=5$ et $(\triangle)\colon y=2x+1$
2) $(\mathcal{C})\colon (x-4)^2+(y-1)^2=5$ et $(\triangle)\colon y=\frac{x}{2}-\frac{7}{2}$
3) $(\mathcal{C})\colon (x-4)^2+(y-1)^2=5$ et $(\triangle)\colon y=-2x+5$
4) $(\mathcal{C})\colon (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\triangle)\colon y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$
5) $(\mathcal{C})\colon (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\triangle)\colon y=3x+4$
6) $(\mathcal{C})\colon (x+2)^2+(y-3)^2=25$ et $(\triangle)\colon y=-x-8$

Pour préparer l'interrogation :

7) $(\mathcal{C})\colon (x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$ et $(\triangle)\colon y=2x-1$
8) $(\mathcal{C})\colon (x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$ et $(\triangle)\colon y=2x-3$
9) $(\mathcal{C})\colon (x+1)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{4}$ et $(\triangle)\colon y=-4x+6$

Solution de l'exercice 25

1) a) la droite $(\triangle)$ est extérieure au cercle $(\mathcal{C})$ b) il n'y a pas de points d'intersection
2) a) la droite $(\triangle)$ est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ b) $(5;-1)$
3) a) la droite $(\triangle)$ est sécante au cercle $(\mathcal{C})$ b) $\left(\frac{9}{5};\frac{7}{5}\right)$ et $(3;-1)$
4) a) la droite $(\triangle)$ est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ b) $(2;0)$
5) a) la droite $(\triangle)$ est sécante au cercle $(\mathcal{C})$ b) $(-2;-2)$ et $(1;7)$
6) a) la droite $(\triangle)$ est extérieure au cercle $(\mathcal{C})$ b) il n'y a pas de points d'intersection
7) a) la droite $(\triangle)$ est sécante au cercle $(\mathcal{C})$ b) $\left(\frac{3}{5};\frac{1}{5}\right)$ et $(1;1)$
8) a) la droite $(\triangle)$ est extérieure au cercle $(\mathcal{C})$ b) il n'y a pas de points d'intersection
9) a) la droite $(\triangle)$ est tangente au cercle $(\mathcal{C})$ b) $(1;2)$.

Exercice 26 – À la Maturita orale

1) Résoudre le système :

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0 \end{cases}.$$

2) Donner une interprétation géométrique de votre résultat.

Solution de l'exercice 26

1)
$\begin{cases} x = 2 + 2\sqrt{2} \\ y = 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 2 - 2\sqrt{2} \\ y = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$

2)
Les solutions sont les coordonnées des points d'intersection du cercle d'équation $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$ avec la droite d'équation $y = x + 1$.